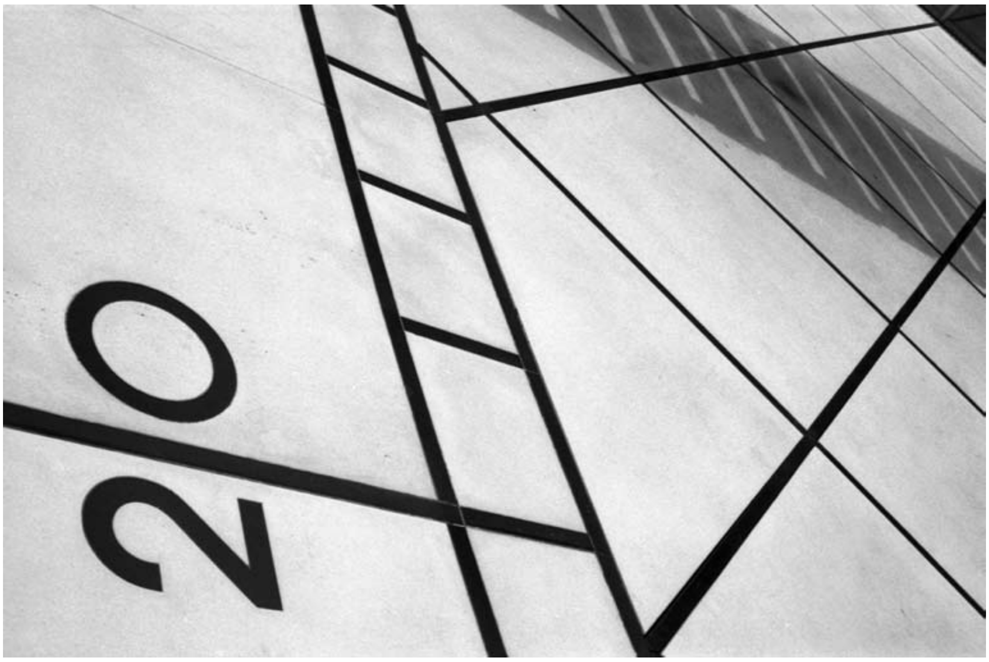
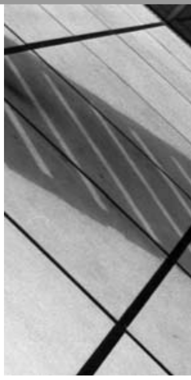


París



Wittgenstein y la filosofía de la matemática

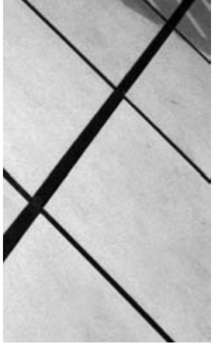
◆ Silvio Pinto

El interés del filósofo vienés Ludwig Wittgenstein (1889-1951) por la naturaleza y los fundamentos de la matemática fue muy temprano en él y se extendió a lo largo de toda su vida. Wittgenstein había estudiado ingeniería en una escuela técnica de Berlín y realizó una estancia de investigación en Manchester en 1908. Ahí se interesó por la aeronáutica y más específicamente por el diseño de hélices. El estudio de la forma de las hélices requería un tratamiento matemático complicado y pudo haber sido esto lo que le llevó a profundizar sobre las teorías matemáticas relevantes para su proyecto en aeronáutica y a preguntarse acerca de los propios fundamentos de estas teorías.

A finales del siglo XVIII e inicios del XIX, y coincidentemente con el movimiento de rigorización de la matemática, se podía notar una tendencia reduccionista en algunos matemáticos para encontrar la teoría más básica a partir de la cual toda la matemática podría ser generada. Un ejemplo de tal tendencia en los siglos XVI y XVII fue el descubrimiento de la geometría cartesiana. Con esta nueva teoría es posible representar cualquier figura geométrica en términos de conjuntos de n-uplas ordenadas de números reales. Como resultado del movimiento reduccionista, la aritmética fue tomada como el fundamento de toda la matemática. Pero los matemáticos con inclinaciones filosóficas no quedaron satisfechos con esto; era necesario encontrar una teoría más fundamental sobre la cual pudiera descansar la aritmética.

Debemos al filósofo y matemático alemán Gottlob Frege (1848-1925) el primer gran intento de buscar un fundamento más sólido para la aritmética de los números naturales. Según Frege, tal fundamento sólo podría ser algo tan general y tan seguro como la lógica. El programa logicista fregeano involucraba dos tesis: 1) los conceptos básicos de la aritmética (el cero, el número natural y el sucesor) deben ser definidos en términos de conceptos estrictamente lógicos; 2) las verdades más básicas de la aritmética (los axiomas de Peano), deben poder ser demostrados a partir de verdades puramente lógicas y definiciones. El logicismo de

◆ Departamento de Filosofía, Universidad Autónoma Metropolitana, *campus* Iztapalapa



Frege da sus primeros pasos con la publicación, en el año de 1879, de la *Conceptografía*,[1] y alcanza su madurez entre 1893 y 1903 con la publicación de los dos primeros volúmenes de las *Leyes Básicas de la Aritmética*.[2] Irónicamente, la consecución del logicismo fregeano coincide con el descubrimiento, por el filósofo inglés Bertrand Russell (1872-1970), de la contradicción que vino a fulminar el programa fundacionista fregeano: la contradicción de la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas.

Un ejemplo de una clase que se pertenece a sí misma es la clase de todas las clases. Normalmente una clase no es un elemento de sí misma: la clase de los planetas del sistema solar no es un planeta; por lo tanto, no se pertenece a sí misma. La contradicción está en que si suponemos que la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas se pertenece a sí misma, entonces estamos obligados a concluir que ella no se pertenece a sí misma, ya que si pertenece a sí misma entonces tiene que satisfacer a la propiedad de no pertenecerse a sí misma. Por otro lado, si suponemos que tal clase no se pertenece a sí misma, entonces estamos forzados a concluir que ella sí pertenece a sí misma, una vez que por no pertenecerse a sí misma debe ser un miembro de la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas y, por lo tanto, un miembro de sí misma.

La contradicción de Russell llevó a Frege a desistir del programa logicista pero tuvo un efecto opuesto sobre el mismo Russell. La contradicción se deriva de la famosa ley V del sistema de las *Leyes Básicas*, la cual afirma que cualquier propiedad determina una clase. Por ejemplo, la propiedad de no pertenecerse a sí mismo determina una clase, la constituida por todas las cosas que no se pertenecen a sí mismas. Si esta clase existe, entonces tiene sentido preguntar si satisface la propiedad que la define.

Russell se dedicó a la tarea de reconstruir el programa logicista de manera consistente. Para evitar la contradicción que lleva su nombre, se hizo necesario, según él, proponer una teoría de los tipos de cosas. Hay objetos que son cosas del primer tipo; hay clases de objetos del primer tipo las cuales son cosas del segundo tipo; hay clases de objetos del segundo tipo las cuales son cosas del tercer tipo, etcétera. Esta tipología impide la aplicación de la relación de pertenencia a cosas del mismo tipo. La propiedad de pertenecerse a sí mismo es un sinsentido, de acuerdo con la teoría de tipos, pero también lo es la negación de esta propiedad. Por lo tanto, ninguna de ellas determina una clase.

El logicismo russelliano no satisfizo en absoluto a Wittgenstein. Russell había publicado en 1910 el primer volumen de los monumentales *Principia*

[1] Gottlob Frege, “Begriffschrift, a formula language modelled upon that of arithmetic, for pure thought”, en Jean van Heijenoort (comp.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, 1967, y *Conceptografia. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros estudios filosóficos*, UNAM (IIF), México, 1972.

[2] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1893-1903.

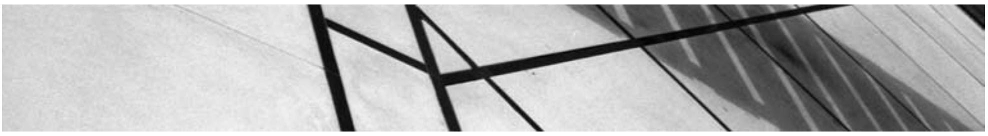
Mathematica,[3] obra que fue duramente criticada por Wittgenstein, para quien algunos de los axiomas de la lógica utilizada por Russell para fundar toda la matemática simplemente no poseían la característica de una proposición de la lógica: la de ser una tautología. Este era el caso del axioma de infinitud que afirma la existencia de infinitos objetos. Russell necesitaba este axioma para garantizar la existencia de toda la secuencia de números naturales, ya que en su sistema los números son definidos como clases de clases de objetos. El número 3, por ejemplo, es definido como la clase de todas las ternas de objetos. Si el número de objetos fuera finito, entonces no habría manera de generar dentro de la concepción russelliana el conjunto infinito de los números naturales. Imagínese que el mundo poseyera 10 objetos; todos los números a partir del 11 serían idénticos entre sí o no existirían.

Para Wittgenstein, sin embargo, las proposiciones de la lógica no pueden hacer afirmaciones sobre el mundo en que vivimos; la lógica tiene que ser compatible con todos los mundos posibles. La característica de las proposiciones de la lógica no es, como pensaban Frege y Russell, su generalidad (el hecho de que hablen de la totalidad de las cosas) sino más bien, según el autor del *Tractatus Logico-Philosophicus*,[4] su no decir nada, la ausencia de contenido informacional sobre cualquier mundo en particular. Una proposición como "llueve o no llueve" es una proposición de la lógica a pesar de no ser general. Las proposiciones de la lógica son, según la doctrina del *Tractatus*, tautologías.

Russell le había encargado a Wittgenstein reescribir los *Principia*, pero éste había encontrado tantos errores que decidió escribir su propio libro. Este fue el *Tractatus Logico-Philosophicus*, concluido mientras Wittgenstein luchaba por el Imperio Austrohúngaro en la primera guerra mundial. Las divergencias entre este libro y los *Principia* con relación a la naturaleza de la lógica y la matemática son enormes. Quizá la más importante es que, en el *Tractatus*, ni la lógica ni la matemática hacen afirmaciones sobre la realidad. En oposición a Frege y a Russell, Wittgenstein sostenía que no hay objetos lógicos ni matemáticos, y esto fue algo que mantuvo durante toda su obra. La otra divergencia fundamental entre el autor del *Tractatus* y Russell es que, tanto la lógica como la aritmética, dejan de ser para el primero dos sistemas de los enunciados más generales sobre el mundo en que vivimos. En el *Tractatus*, lógica y matemática constituyen reglas de sintaxis del lenguaje.

Así, una tautología como el principio de doble negación es, en verdad, una regla de transformación de símbolos en otros símbolos expresada como una proposición. De esta forma, lo que estaría diciendo es que, de un símbolo proposicional negado dos veces, se puede inferir el símbolo

[3] Alfred Whitehead y Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910-1913.
[4] Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge, London, 1922.



proposicional sin las dos negaciones. Tal regla estaría explorando las propiedades semánticas del símbolo de negación (la propiedad de invertir el sentido o las condiciones de verdad del símbolo proposicional al cual se aplica). La concepción tractariana sobre las conectivas lógicas es que su significado no reside en su referirse a algo sino que denotan operaciones de verdad sobre símbolos proposicionales. Por ejemplo, la conjunción opera sobre dos símbolos proposicionales, "p" y "q", produciendo un símbolo proposicional cuyas condiciones de verdad dependen de las condiciones de verdad de "p" y "q" de la siguiente manera: "p y q" es verdadera cuando "p" es verdadera y "q" es verdadera, y es falsa en todos los demás casos. Este tipo de dependencia entre los valores de verdad de "p" y "q" y el valor de verdad de símbolos proposicionales complejos vale para todas las otras conectivas lógicas proposicionales. Estas conectivas denotan reglas para la formación de símbolos proposicionales más complejos a partir de símbolos proposicionales menos complejos.

Análogamente, una ecuación numérica como 2 + 2 = 4 correspondería a una regla para la sustitución del símbolo "2 + 2" por el símbolo "4" en cualquier otro símbolo proposicional en que el primero apareciera. En este sentido, las ecuaciones también serían reglas de inferencia.[5] Los símbolos para números (el "2", el "4", el "2 + 2", entre otros), que Frege había tomado como nombres propios (símbolos que se refieren a los números), son considerados en el *Tractatus* como contadores de las reiteraciones de las aplicaciones de una operación.

Como dice Wittgenstein, las operaciones son transformaciones de símbolos proposicionales en otros símbolos proposicionales. La negación y todas las otras conectivas proposicionales son quizá los ejemplos más comunes de operaciones. Es esencial a las operaciones tractarianas que ellas se pueden aplicar al resultado de la aplicación anterior de la primera operación o de otras operaciones aplicadas a un grupo de símbolos proposicionales. Supongamos entonces que a un símbolo proposicional "p" al cual le habíamos aplicado la negación, le aplicamos la negación una vez más. Podemos expresar esto de la siguiente manera: $\neg(\neg p)$. Esto es equivalente en la notación del *Tractatus* a $\neg^2 p$. De ahí la tesis de que los números son exponentes de operaciones. Todos los operadores sobre los números naturales, tales como el sucesor, la suma, la multiplicación, la exponenciación, entre otros, tendrían que ser interpretados como operadores sobre los exponentes de operaciones sobre proposiciones. Y de hecho toda la aritmética de las ecuaciones e inecuaciones numéricas, con todas las propiedades de la suma, la multiplicación, la exponenciación, se aplica a los exponentes de las operaciones tractarianas.

---

[5] *Ibid*.

El problema de la concepción tractariana de la matemática es que parece demasiado estrecha. Aunque el problema filosófico acerca de la naturaleza de la matemática fuera simplemente dar cuenta de la aritmética, se podría decir que el *Tractatus* no lo ha logrado. Lo que llamamos aritmética de primer orden con identidad está lleno de proposiciones cuantificadas como, por ejemplo, las proposiciones "hay infinitos números primos" (la proposición de Euclides) o "no hay ternas (x, y, z) de números naturales que satisfagan a la ecuación $x^n + y^n = z^n$ para n mayor que 2" (el último teorema de Fermat).

Wittgenstein tenía una razón para excluir de la aritmética tractariana proposiciones cuya cuantificación fuera de tipo ilimitado; él creía que la generalidad propia de las proposiciones aritméticas es la que se relaciona con la noción de la reiteración indefinida de una operación, es decir, la generalidad que se asocia a la recursividad. Pero de todas maneras, uno querría incluir también estas proposiciones generales, como las arriba mencionadas, cuya generalidad no se reduce a aquella de la aritmética recursiva (la aritmética de las ecuaciones numéricas, sus funciones de verdad proposicionales y las proposiciones con cuantificadores limitados, es decir, cuantificaciones que son equivalentes a una conjunción o disyunción finita de proposiciones). Además, si uno no es un reduccionista en matemática, puede querer dar cuenta de la naturaleza de las proposiciones matemáticas que no pertenecen a la aritmética.

Wittgenstein llega a una concepción menos estrecha sobre la matemática en su etapa intermedia, a saber, en sus escritos que van desde 1929, cuando regresa a Cambridge, hasta más o menos 1934, cuando empieza a preparar el material para las *Investigaciones Filosóficas*.[6] En esta etapa conserva la idea tractariana de que las proposiciones matemáticas son reglas de la sintaxis del lenguaje. Lo que sí cambia es la tesis de que hay un único sistema de reglas gramaticales que muestran la forma común del lenguaje y del mundo. De acuerdo con el Wittgenstein de esta etapa, hay varios sistemas autónomos de reglas gramaticales: la lógica, la aritmética, la geometría euclideana, la gramática de los colores, entre otros. Esto implica un claro rechazo al reduccionismo matemático del *Tractatus* y a su respectiva tesis de que lo estrictamente matemático se limita al conjunto de las ecuaciones numéricas.

Otro cambio interesante del Wittgenstein de esta etapa, y que también tiene que ver con una concepción más "liberal", se refiere al contenido de las proposiciones matemáticas. Para el autor del *Tractatus*, la noción de prueba en lógica o en matemática no tiene importancia, ya que todas las proposiciones lógicas y matemáticas están en el mismo nivel; no hay unas proposiciones más básicas (los axiomas) que otras que se deriven de

---

[6] Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, Basil Blackwell, Oxford, 1953.

ellas por medio de reglas de inferencia. En los casos de las tautologías y ecuaciones complicadas, Wittgenstein creía, en el *Tractatus*, que para todos los casos había procedimientos mecánicos para reconocerlas. Con la tesis de los sistemas autónomos de reglas gramaticales, la noción de prueba pasa a desempeñar un papel central para Wittgenstein como aquello que da el contenido de una proposición matemática: su significado se identifica con una prueba de ella o, por lo menos, con la existencia de un método para encontrar alguna prueba. Esta tesis aproxima el verificacionismo de la etapa intermedia de Wittgenstein a la tesis según la cual el contenido de cualquier proposición está dado por su método de verificación; en el caso de la matemática, la verificación se traduce en términos de una prueba de la proposición en cuestión.

La concepción de la etapa intermedia sobre el contenido de las proposiciones matemáticas permite incluir dentro de la aritmética más proposiciones que las ecuaciones numéricas; se incluyen ahí todas las proposiciones para las cuales hay un método mecánico para decidir sobre su corrección o incorrección, además de las proposiciones indecidibles[7] para las cuales hay una prueba; por ejemplo, el último teorema de Fermat. Sin embargo, tal concepción es todavía insatisfactoria en la medida en que excluye de la matemática todas aquellas proposiciones indecidibles para las cuales no tenemos una prueba, como las conjeturas matemáticas. Un ejemplo de éstas es la conjetura de Goldbach, que afirma que todo número natural par es la suma de dos números primos.

Una concepción más satisfactoria de la matemática fue alcanzada por Wittgenstein únicamente hasta su etapa de madurez, es decir, a partir de 1934. La tesis tractariana de que las proposiciones matemáticas son reglas de sintaxis del lenguaje se conserva aún en esta etapa, cuando cobra más importancia la idea de que la matemática es una actividad gobernada por reglas que se expresan por medio de proposiciones. Esto significa que las reglas matemáticas ya no son vistas meramente como instrucciones para la manipulación de símbolos, como ocurría en el *Tractatus* sino más bien como la forma de establecer una conexión entre ciertos símbolos y determinadas acciones. Las reglas matemáticas corresponden a ciertas prácticas —por ejemplo, la práctica de calcular— que tienen un papel fundamental en el conjunto de nuestras actividades. Lo que constituye a una proposición como matemática en la etapa de madurez de Wittgenstein deja de ser en primer término su prueba o la posibilidad de encontrar alguna; así, una proposición es matemática, por una parte, en tanto su aplicación o su uso corresponde a ciertas prác-

[7] Una proposición indecidible es aquella para la cual no hay un algoritmo que nos permita determinar su valor de verdad en un número finito de pasos. Por ejemplo, todas las proposiciones aritméticas que contienen cuantificadores ilimitados son indecidibles en este sentido.

ticas, como la antes mencionada, y por otra, en la medida en que funciona como una regla para la evaluación de estas prácticas.

Por ejemplo, la ecuación numérica 25 x 25 = 625 nos podría servir para juzgar si al empacar objetos en cajas de exactamente 25 objetos cada una, no nos falta ni nos sobra ningún objeto. Similarmente, la proposición “la suma de los cuadrados de las dimensiones de los catetos de un triángulo plano rectángulo es igual al cuadrado de la dimensión de su hipotenusa” podría ser utilizada para decidir si un determinado triángulo es plano o no. Es esencial a la proposición matemática el ejemplificar una norma que gobierna determinadas actividades que, por falta de un término más general, denominamos como “técnicas de calcular”.

Esta nueva concepción del contenido de las proposiciones matemáticas implica una disminución en la importancia de la noción de prueba. Hay que recordar que en el periodo intermedio de Wittgenstein la prueba consistía en la cadena que liga la proposición matemática con su respectivo sistema. La conexión entre proposición y cálculo se da en la concepción de la etapa de madurez no solamente a través de su respectiva prueba sino también por medio de los términos constituyentes de la proposición que, de acuerdo con lo que hemos visto, también expresan reglas matemáticas. Esto es importante porque permite incluir también conjeturas dentro del dominio matemático. Así, la conjetura de Goldbach es una proposición matemática, ya que todos sus conceptos constituyentes corresponden a reglas lógicas o matemáticas (los conceptos de “número par” o “número primo”, por ejemplo) a pesar de que no hay una prueba de ella.

Estas son algunas de las ideas de Wittgenstein sobre la naturaleza de la matemática. Se tuvo que dejar de lado varios aspectos importantes de su concepción como, por ejemplo, las cuestiones de la objetividad matemática, su carácter *a priori* y la relación entre la matemática y su aplicación. Sin embargo, es importante subrayar la tesis, que Wittgenstein defendió durante toda su vida, de que la matemática no habla de objetos sino que nos ofrece parte de las reglas que nos permiten hablar con sentido de la realidad.